

3.1

- a) Lasketaan lukujonon viisi ensimmäistä jäsentä. Lausekkeeseen

$a_n = 2 - 5n$ sijoitetaan n :n arvot 1, 2, 3, 4 ja 5.

$$a_1 = 2 - 5 \cdot 1 = -3 \quad \text{Sijoitetaan } n = 1.$$

$$a_2 = 2 - 5 \cdot 2 = -8 \quad \text{Sijoitetaan } n = 2.$$

$$a_3 = 2 - 5 \cdot 3 = -13 \quad \text{Sijoitetaan } n = 3.$$

$$a_4 = 2 - 5 \cdot 4 = -18 \quad \text{Sijoitetaan } n = 4.$$

$$a_5 = 2 - 5 \cdot 5 = -23 \quad \text{Sijoitetaan } n = 5.$$

Lasketaan lukujonon 10. jäsen.

$$a_{10} = 2 - 5 \cdot 10 = -48 \quad \text{Sijoitetaan } n = 10.$$

- b) Luku -210 on lukujonon jäsen, jos löytyy sellainen positiivinen kokonaisluku n , jolla $a_n = -210$. Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan n .

$$a_n = -210 \quad \text{Sijoitetaan } a_n = 2 - 5n.$$

$$2 - 5n = -210 \quad | -2$$

$$-5n = -212 \quad | :(-5)$$

$$n = 42,4$$

Ratkaisu $n = 42,4$ ei ole positiivinen kokonaisluku, joten luku -210 ei ole lukujonon jäsen.

- c) Luku -413 on lukujonon jäsen, jos löytyy sellainen positiivinen kokonaisluku n , jolla $a_n = -413$. Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan n .

$$a_n = -413 \qquad \text{Sijoitetaan } a_n = 2 - 5n.$$

$$2 - 5n = -413 \quad | -2$$

$$-5n = -415 \quad | :(-5)$$

$$n = 83$$

Ratkaisu $n = 83$ on positiivinen kokonaisluku, joten luku -413 on lukujonon 83. jäsen.

Vastaus

- a) Viisi ensimmäistä jäsentä ovat -3 , -8 , -13 , -18 , -23 .
Kymmenes jäsen on -48 .
b) ei ole
c) on, 83. jäsen

3.2

a) Lasketaan lukujonon kolme ensimmäistä jäsentä.

$$a_1 = 7 \cdot 1 - 4 = 3 \quad \text{Sijoitetaan } n = 1.$$

$$a_2 = 7 \cdot 2 - 4 = 10 \quad \text{Sijoitetaan } n = 2.$$

$$a_3 = 7 \cdot 3 - 4 = 17 \quad \text{Sijoitetaan } n = 3.$$

Luku 165 on lukujonon jäsen, jos löytyy sellainen positiivinen kokonaisluku n , jolla $a_n = 165$. Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan n .

$$a_n = 165 \quad \text{Sijoitetaan } a_n = 7n - 4.$$

$$7n - 4 = 165 \quad | +4$$

$$7n = 169 \quad | :7$$

$$n \approx 24,14$$

Ratkaisu $n \approx 24,14$ ei ole positiivinen kokonaisluku, joten luku 165 ei ole lukujonon jäsen.

b) Lasketaan lukujonon kolme ensimmäistä jäsentä.

$$a_1 = 1^2 - 4 \cdot 1 = -3 \quad \text{Sijoitetaan } n = 1.$$

$$a_2 = 2^2 - 4 \cdot 2 = -4 \quad \text{Sijoitetaan } n = 2.$$

$$a_3 = 3^2 - 4 \cdot 3 = -3 \quad \text{Sijoitetaan } n = 3.$$

Luku 165 on lukujonon jäsen, jos löytyy sellainen positiivinen kokonaisluku n , jolla $a_n = 165$. Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan n .

$$\begin{array}{ll}
 a_n = 165 & \text{Sijoitetaan } a_n = n^2 - 4n. \\
 n^2 - 4n = 165 & | -4 \\
 n^2 - 4n - 165 = 0 & ax^2 + bx + c = 0 \\
 n = \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-165)}}{2 \cdot 1} & x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \\
 = \frac{4 \pm 26}{2} & \\
 n = \frac{4 + 26}{2} = 15 \quad \text{tai} \quad n = \frac{4 - 26}{2} = -11 &
 \end{array}$$

Ratkaisu $n=15$ on positiivinen kokonaisluku, joten luku 165 on lukujonon 15. jäsen.

Vastaus

- a)** kolme ensimmäistä jäsentä 3, 10 ja 17;
 luku 165 ei ole lukujonon jäsen
b) kolme ensimmäistä jäsentä -3, 4 ja -3;
 luku 165 on lukujonon 15. jäsen

3.3

Lukujonon ensimmäisen jäsen $a_1 = 7$.

Toisesta jäsenestä alkaen käytetään rekursiokaavaa $a_n = 3 \cdot a_{n-1} + 2$.

Määritetään lukujonon viisi ensimmäistä jäsentä.

$$a_1 = 7$$

$$a_2 = 3 \cdot 7 + 2 = 23$$

$$a_3 = 3 \cdot 23 + 2 = 71$$

$$a_4 = 3 \cdot 71 + 2 = 215$$

$$a_5 = 3 \cdot 215 + 2 = 647$$

Vastaus

7, 23, 71, 215 ja 647

3.4

a) Lukujonon ensimmäisen jäsen $a_1 = 4$.

Toisesta jäsenestä alkaen käytetään rekursiokaavaa $a_n = a_{n-1} + 7$.

Määritetään lukujonon neljä ensimmäistä jäsentä.

$$a_1 = 4$$

$$a_2 = 4 + 7 = 11$$

$$a_3 = 11 + 7 = 18$$

$$a_4 = 18 + 7 = 25$$

b) Lukujonon ensimmäisen jäsen $a_1 = 4$.

Toisesta jäsenestä alkaen käytetään rekursiokaavaa $a_n = 7 \cdot a_{n-1}$.

Määritetään lukujonon neljä ensimmäistä jäsentä.

$$a_1 = 4$$

$$a_2 = 7 \cdot 4 = 28$$

$$a_3 = 7 \cdot 28 = 196$$

$$a_4 = 7 \cdot 196 = 1372$$

Vastaus

a) 4, 11, 18, 25

b) 4, 28, 196, 1372

3.5

Kirjoitetaan sarakkeeseen A jäsenten järjestysluvut 1, 2, 3, ... , 15.
Lasketaan sarakkeeseen B lukujonon 15 ensimmäistä jäsentä ja niiden summa.

	A	B
1	n	jäsen
2	1	-6
3	2	-10
4	3	-12
5	4	-12
6	5	-10
7	6	-6
8	7	0
9	8	8
10	9	18
11	10	30
12	11	44
13	12	60
14	13	78
15	14	98
16	15	120
17	Summa	400

$$B_n = A_n^2 - 7 \cdot A_n$$

15. jäsen
summa

Viidestoista jäsen on 120 ja viidentoista ensimmäisen jäsenen summa 400.

Vastaus

viidestoista jäsen on 120;

viidentoista ensimmäisen jäsenen summa on 400

3.6

Kirjoitetaan sarakkeeseen A jäsenten järjestysluvut 1, 2, 3, ... , 30.
Lasketaan sarakkeeseen B lukujonon 30 ensimmäistä jäsentä ja niiden summa.

	A	B
1	n	jäsen
2	1	-2
3	2	-1
4	3	1
5	4	5
6	5	13
7	6	29
8	7	61
9	8	125
10	9	253
11	10	509
12	11	1021
13	12	2045
...
30	29	268 435 453
31	30	536 870 909
32	Summa	1 073 741 733

”=2*B2 + 3”

30. jäsen
summa

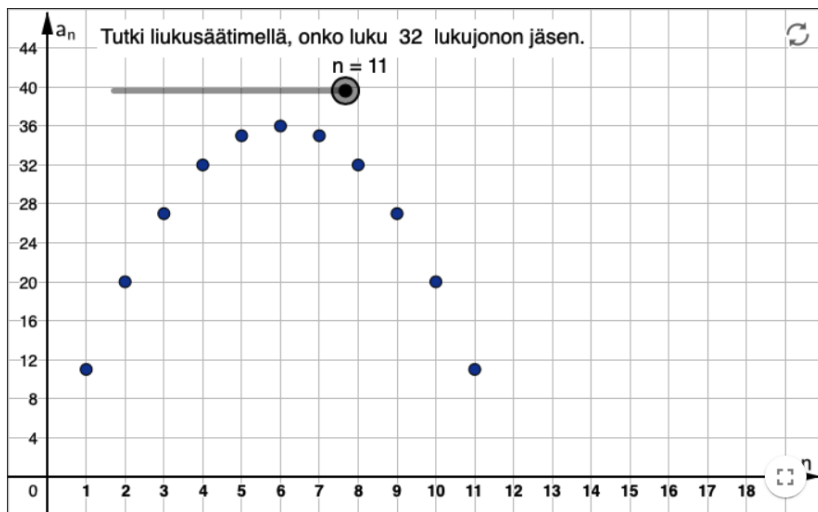
Kolmaskymmenes jäsen on 536 870 909 ja kolmenkymmenen ensimmäisen jäsenen summa 1 073 741 733.

Vastaus

kolmaskymmenes jäsen on 536 870 909;
kolmenkymmenen ensimmäisen jäsenen summa on 1 073 741 733.

3.7

a) Appletin perusteella sekä lukujonon 4. että 8. jäsen on 32.



b) Luku 32 on lukujonon jäsen, jos löytyy sellainen positiivinen kokonaisluku n , jolla $a_n = 32$.

$$a_n = 32$$

$$12n - n^2 = 32 \quad \text{Ratkaistaan CAS-laskimella.}$$

$$n = 4 \quad \text{tai} \quad n = 8$$

Molemmat ratkaisusta ovat positiivisia kokonaislukuja. Luku 32 on siis lukujonon 4. ja 8. jäsen.

Vastaus

on, 4. ja 8. jäsen

3.8

Kirjoitetaan sarakkeeseen A viikkojen järjestysluvut 1, 2, 3,

Lasketaan sarakkeeseen B juoksuohjelman A mukaiset juoksumatkat. Ensimmäinen jäsen on 5,0 km. Seuraava jäsen saadaan aina edellisestä kertomalla luvulla 1,10.

Laskentakaava soluun B3 on $=1,10*B2$.

Lasketaan sarakkeeseen C juoksuohjelman B mukaiset juoksumatkat. Ensimmäinen jäsen on 10,0 km. Seuraava jäsen saadaan aina edellisestä lisäämällä luku 1,5.

Laskentakaava soluun C3 on $=C2 + 1,5$.

	A	B	C
1	viikko	Ohjelma A	Ohjelma B
2	1	5,0	10,0
3	2	5,5	11,5
4	3	6,1	13,0
5	4	6,7	14,5
6	5	7,3	16,0
7	6	8,1	17,5
8	7	8,9	19,0
9	8	9,7	20,5
10	9	10,7	22,0
11	10	11,8	23,5
12	11	13,0	25,0
13	12	14,3	26,5
14	13	15,7	28,0
15	14	17,3	29,5
16	15	19,0	31,0
17	16	20,9	32,5
18	17	23,0	34,0
19	18	25,3	35,5
20	19	27,8	37,0
21	20	30,6	38,5
22	21	33,6	40,0
23	22	37,0	41,5
24	23	40,7	43,0
25	24	44,8	44,5
26	25	49,2	46,0

- a) Viikolla 6 juostaan ohjelman A mukaan 8,1 km ja ohjelman B mukaan 17,5 km
- b) Ohjelman A mukainen matka on pidempi ensimmäisen kerran viikolla 24.

Vastaus

- a) ohjelma A: 8,1 km; ohjelma B: 17,5 km
- b) 24. viikko

3.9

Lasketaan Ilpon arvio.

$$x_1 = 3$$

$$x_2 = \frac{1}{2} \cdot 3 + \frac{5}{3} \approx 2,3333333 \quad x_{n+1} = \frac{1}{2} \left(x_n + \frac{5}{x_n} \right)$$

Lasketaan, kuinka monta prosenttia Ilpon arvio on laskimen antamasta luvun $\sqrt{5}$ likiarvosta.

$$\frac{2,3333333}{\sqrt{5}} \approx 1,043 = 104,3 \%$$

Ilpon arvio on siis $104,3 \% - 100 \% = 4,3 \%$ liian suuri.

Lasketaan Simon arvio.

$$x_2 \approx 2,3333333$$

$$x_3 \approx \frac{1}{2} \cdot \left(2,3333333 + \frac{5}{2,3333333} \right) \approx 2,2380952$$

$$x_4 \approx \frac{1}{2} \cdot \left(2,2380952 + \frac{5}{2,2380952} \right) \approx 2,2360689$$

Lasketaan, kuinka monta prosenttia Simon arvio on laskimen antamasta luvun $\sqrt{5}$ likiarvosta.

$$\frac{2,2360689}{\sqrt{5}} \approx 1,00000041 = 100,000041 \%$$

Simon arvio on siis $0,000\,041 \%$ liian suuri.

Huomaa, että Simon kohdalla riittää, että vastaus on välillä $0,000\,001 - 0,0001 \%$. Vastaus riippuu välivaiheissa käytetyistä tarkkuuksista.

Vastaus

Ilpo $4,3 \%$; Simo $0,000\,041 \%$

3.10

1. Lasketaan lukujonon viisi ensimmäistä jäsentä.

$$a_1 = 1000$$

$$a_2 = 1,02 \cdot 1000 + 100 = 1120$$

$$a_3 = 1,02 \cdot 1120 + 100 = 1242,4$$

$$a_4 = 1,02 \cdot 1242,20 + 100 = 1267,248$$

$$a_5 = 1,02 \cdot 1267,248 + 100 = 1494,59296 \approx 1494,59 \text{ (€)}$$

2. Lasketaan p_2 .

$$p_2 = 0,95 \cdot p_1 + 0,02 \cdot e_2$$

$$= 0,95 \cdot 12 + 0,02 \cdot 23$$

$$= 11,86$$

$$\approx 12 \text{ (korppia)}$$

Sijoitetaan $p_1 = 12$ ja $e_1 = 23$.

Lasketaan e_2 ja e_3 .

$$e_2 = p_1 + e_1(1 - 0,01e_1)$$

$$= 12 + 23 \cdot (1 - 0,01 \cdot 23)$$

$$= 29,71 \approx 30$$

Sijoitetaan $p_1 = 12$ ja $e_1 = 23$.

$$e_3 = p_2 + e_2(1 - 0,01e_2)$$

$$\approx 12 + 30 \cdot (1 - 0,01 \cdot 30)$$

$$= 33 \text{ (korppia)}$$

Sijoitetaan $p_2 = 12$ ja $e_2 = 30$.

Huomaa, että laskettaessa arvoja e_2 ja e_3 voidaan käyttää aiemmin lasketuista arvoista myös tarkkoja arvoja. Desimaaliluvut käyvät, koska kyse on mallista.

Vastaus

1. $a_5 \approx 1494,59 \text{ €}$

2. $p_2 \approx 12$ ja $e_3 \approx 33$

3.11

- a) Lasketaan lukujonon neljä ensimmäistä jäsentä. Lausekkeeseen

$$a_n = \frac{4n+3}{2n-1} \text{ sijoitetaan } n:n \text{ arvot } 1, 2, 3 \text{ ja } 4.$$

$$a_1 = \frac{4 \cdot 1 + 3}{2 \cdot 1 - 1} = \frac{7}{1} = 7 \quad \text{Sijoitetaan } n = 1.$$

$$a_2 = \frac{4 \cdot 2 + 3}{2 \cdot 2 - 1} = \frac{11}{3} \quad \text{Sijoitetaan } n = 2.$$

$$a_3 = \frac{4 \cdot 3 + 3}{2 \cdot 3 - 1} = \frac{15}{5} = 3 \quad \text{Sijoitetaan } n = 3.$$

$$a_4 = \frac{4 \cdot 4 + 3}{2 \cdot 4 - 1} = \frac{19}{7} \quad \text{Sijoitetaan } n = 4.$$

Lasketaan lukujonon 50. jäsen.

$$a_{50} = \frac{4 \cdot 50 + 3}{2 \cdot 50 - 1} = \frac{203}{99} \quad \text{Sijoitetaan } n = 50.$$

- b) Luku $\frac{51}{25}$ on lukujonon jäsen, jos löytyy sellainen positiivinen

kokonaisluku n , jolla $a_n = \frac{51}{25}$. Muodostetaan yhtälö ja

ratkaistaan n .

$$a_n = \frac{51}{25} \quad \text{Sijoitetaan } a_n = \frac{4n+3}{2n-1}.$$

$$\frac{4n+3}{2n-1} = \frac{51}{25}$$

$$25 \cdot (4n+3) = 51 \cdot (2n-1)$$

$$100n + 75 = 102n - 51 \quad | -102n - 75$$

$$-2n = -126 \quad | :(-2)$$

$$n = 63$$

Ratkaisu $n = 63$ on positiivinen kokonaisluku, joten luku $\frac{51}{25}$ on lukujonon 63. jäsen.

- c) Luku $\frac{52}{25}$ on lukujonon jäsen, jos löytyy sellainen positiivinen kokonaisluku n , jolla $a_n = \frac{52}{25}$. Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan n .

$$\begin{aligned}a_n &= \frac{52}{25} & \text{Sijoitetaan } a_n &= \frac{4n+3}{2n-1} \\ \frac{4n+3}{2n-1} &= \frac{52}{25} \\ 25 \cdot (4n+3) &= 52 \cdot (2n-1) \\ 100n + 75 &= 104n - 52 & | -102n - 75 \\ -4n &= -127 & | : (-2) \\ n &= 31,75\end{aligned}$$

Ratkaisu $n = 31,75$ ei ole positiivinen kokonaisluku, joten luku $\frac{52}{25}$ ei ole lukujonon jäsen.

Vastaus

- a) Neljä ensimmäistä jäsentä ovat 7 , $\frac{11}{4}$, 3 ja $\frac{19}{7}$.

Viideskymmenes jäsen on $\frac{203}{99}$.

- b) on, 63. jäsen

- c) ei ole

3.12

Lukujonon ensimmäisen jäsen $a_1 = -5$.

Toisesta jäsenestä alkaen käytetään rekursiokaavaa $a_n = 2 \cdot a_{n-1} + 9$.

Määritetään lukujonon viisi ensimmäistä jäsentä.

$$a_1 = -5$$

$$a_2 = 2 \cdot (-5) + 9 = -1$$

$$a_3 = 2 \cdot (-1) + 9 = 7$$

$$a_4 = 2 \cdot 7 + 9 = 23$$

$$a_5 = 2 \cdot 23 + 9 = 55$$

Vastaus

$-5, -1, 7, 23$ ja 55

3.13

- a) Kirjoitetaan sarakkeeseen A jäsenten järjestysluvut 1, 2, 3, ..., 15. Lasketaan sarakkeeseen B lukujonon 15 ensimmäistä jäsentä ja niiden summa.

	A	B
1	n	jäsen
2	1	-3
3	2	-1
4	3	3
5	4	11
6	5	27
7	6	59
8	7	123
9	8	251
10	9	507
11	10	1019
12	11	2043
13	12	4091
14	13	8187
15	14	16 379
16	15	32 763
17	Summa	65 459

$$B_n = 2^n A_n - 5$$

15. jäsen
summa

Viidestoista jäsen on 32 763 ja viidentoista ensimmäisen jäsenen summa 65 459.

- b) Kirjoitetaan sarakkeeseen A jäsenten järjestysluvut 1, 2, 3, ..., 15. Lasketaan sarakkeeseen B lukujonon 15 ensimmäistä jäsentä ja niiden summa.

	A	B
1	n	jäsen
2	1	450
3	2	-150
4	3	1650

$$B_n = 1200 - 3 \cdot B_{n-2}$$

5	4	-3750	
6	5	12450	
7	6	-36150	
8	7	109650	
9	8	-327750	
10	9	984450	
11	10	-2952150	
12	11	8857650	
13	12	-26571750	
14	13	79716450	
15	14	-239148150	
16	15	717 445 650	30. jäsen
17	Summa	538 088 550	summa

Viidestoista jäsen on 717 445 650 ja viidentoista ensimmäisen jäsenen summa 530 088 550

Vastaus

- a) viidestoista jäsen on 32 763;
viidentoista ensimmäisen jäsenen summa on 65 459
- b) viidestoista jäsen on 717 445 650;
viidentoista ensimmäisen jäsenen summa on 530 088 550

3.14

- a) Lukujonon ensimmäisen jäsen $a_1 = 1$ ja toinen jäsen $a_2 = 1$.

Kolmannesta jäsenestä alkaen käytetään rekursiokaavaa

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2}.$$

Määritetään lukujonon viisi ensimmäistä jäsentä.

$$a_1 = 1$$

$$a_2 = 1$$

$$a_3 = 1 + 1 = 2$$

$$a_4 = 2 + 1 = 3$$

$$a_5 = 3 + 2 = 5$$

- b) Kirjoitetaan sarakkeeseen A jäsenten järjestysluvut 1, 2, 3, ..., 30.
Lasketaan sarakkeeseen B lukujonon 30 ensimmäistä jäsentä.

	A	B
1	n	jäsen
2	1	1
3	2	1
4	3	2
5	4	3
6	5	5
7	6	8
8	7	13
9	8	21
10	9	34
11	10	55
12	11	89
13	12	144
...
30	29	514 229
31	30	832 040

"=B3+B2"

30. jäsen

Kolmaskymmenes jäsen on 832 040

Vastaus

- a) 1, 1, 2, 3, 5

- b) 832 040

3.15

Malliratkaisussa vastaukset on perusteltu, vaikka sitä ei tehtävässä vaadittukaan.

1.1 $a_n = 2n - 1$

$$a_1 = 2 \cdot 1 - 1 = 1$$

$$a_2 = 2 \cdot 2 - 1 = 3$$

$$a_3 = 2 \cdot 3 - 1 = 5$$

$$a_4 = 2 \cdot 4 - 1 = 7$$

Oikea jono on **C.** (1, 3, 5, 7, ...)

1.2 $a_n = n^2$

$$a_1 = 1^2 = 1$$

$$a_2 = 2^2 = 4$$

$$a_3 = 3^2 = 9$$

$$a_4 = 4^2 = 16$$

Oikea jono on **D.** (1, 4, 9, 16, ...)

1.3 $a_n = n^3$

$$a_1 = 1^3 = 1$$

$$a_2 = 2^3 = 8$$

$$a_3 = 3^3 = 27$$

$$a_4 = 4^3 = 64$$

Oikea jono on **E.** (1, 8, 27, 64, ...)

1.4 $a_n = 2^n$

$$a_1 = 2^1 = 2$$

$$a_2 = 2^2 = 4$$

$$a_3 = 2^3 = 8$$

$$a_4 = 2^4 = 16$$

Oikea jono on **G.** (2, 4, 8, 16, ...)

1.5 $a_1 = 2$ ja $a_n = a_{n-1} + 2$, kun $n \geq 2$

$$a_1 = 2$$

$$a_2 = 2 + 2 = 4$$

$$a_3 = 4 + 2 = 6$$

$$a_4 = 6 + 2 = 8$$

Oikea jono on **F.** (2, 4, 6, 8, ...)

1.6 $a_1 = 1$, $a_2 = 2$ ja $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$, kun $n \geq 3$

$$a_1 = 1$$

$$a_2 = 2$$

$$a_3 = 2 + 1 = 3$$

$$a_4 = 3 + 2 = 5$$

Oikea jono on **B.** (1, 2, 3, 5, ...)

Vastaus

1.1 C

1.2 D

1.3 E

1.4 G

1.5 F

1.6 B

3.16

a) Lukujonon ensimmäinen jäsen $a_1 = 5000$.

Pääoma kasvaa vuosittain 1,03-kertaiseksi. Lisäksi pääoma kasvaa uudella 5000 euron talletuksella.

Toisesta jäsenestä alkaen lukujonon jäsen saadaan rekursiokaavalla

$$a_n = \underbrace{1,03 \cdot a_{n-1}}_{\substack{\text{koron} \\ \text{lisääminen}}} + \underbrace{50000}_{\substack{\text{lisätty} \\ \text{pääoma}}}.$$

Lukujonon (a_n) rekursiosääntö on

$$\begin{cases} a_1 = 5000 \\ a_n = 1,03 \cdot a_{n-1} + 5000, \text{ kun } n = 2, 3, 4, \dots \end{cases}$$

b) Lasketaan pääomien suuruuksia taulukkolaskentaohjelmalla.

Kirjoitetaan sarakkeeseen A jäsenten järjestysluvut 1, 2, 3,
Lasketaan sarakkeeseen B lukujonon jäseniä.

	A	B
1	n	jäsen
2	1	5000,00
3	2	10 150,00
4	3	15 454,50
5	4	20 918,14
6	5	26 545,68
7	6	32 342,05
8	7	38 312,31
9	8	44 461,68
10	9	50 795,53
11	10	57 319,40
12	11	64 038,98
13	12	70 960,15
14	13	78 088,95
15	14	85 431,62
16	15	92 994,57
17	16	100 784,41
18	17	108 807,94

$$B_n = 1,03 \cdot B_{n-1} + 5000$$

Pääoma kahdeksannen vuoden alussa on 44 461,68 €.

c) Pääoman suuruus on 16. vuoden alussa ensimmäisen kerran yli 100 000 €.

Vastaus

$$a) \begin{cases} a_1 = 5000 \\ a_n = 1,03 \cdot a_{n-1} + 5000, \text{ kun } n = 2, 3, 4, \dots \end{cases}$$

b) 44 461,68 €

c) 16. vuoden

3.17

- a) Pääoma alussa on 1250 €. Tilin nettokorkokanta on 1,8 %.

Saksalaisessa korkotavassa vuodessa on 360 päivää.

Nettokorko n :n päivän kuluttua talletuksesta on

$$\begin{aligned} a_n &= 1250 \cdot 0,018 \cdot \frac{n}{360} & r = \textit{kit} \\ &= 0,0625n. \end{aligned}$$

- b) Pääoma alussa on 1250 €.

Tilin vuotuinen nettokorkokanta on 1,8 %, joten pääoma kasvaa vuosittain 1,018-kertaiseksi.

Pääoman suuruus n :n vuoden kuluttua talletuksesta on

$$a_n = 1250 \cdot 1,018^n.$$

Vastaus

- a) $a_n = 0,0625n$, missä $n = 1, 2, 3, \dots, 360$
b) $a_n = 1250 \cdot 1,018^n$, missä $n = 1, 2, 3, \dots$

3.18

- a) Muodostetaan epäyhtälö ja ratkaistaan, millä muuttujan n arvoilla $a_n < 0$.

$$a_n < 0 \quad \text{Sijoitetaan } a_n = n^2 - 22n + 112.$$

$$n^2 - 22n + 112 < 0 \quad \text{Ratkaistaan CAS-laskimella.}$$

$$8 < n < 14$$

Epäyhtälön toteuttavat positiiviset kokonaisluvut ovat 9, 10, 11, 12 ja 13.

Negatiivisia jäseniä ovat a_9 , a_{10} , a_{11} , a_{12} ja a_{13} .

- b) Määritetään lukujonon jäseniä taulukkolaskentaohjelmalla.

	A	B
1	n	jäsen
2	1	91,00
3	2	72,00
4	3	55,00
5	4	40,00
6	5	27,00
7	6	16,00
8	7	7,00
9	8	0,00
10	9	-5,00
11	10	-8,00
12	11	-9,00
13	12	-8,00
14	13	-5,00
15	14	0,00
16	15	7,00
17	16	16,00

$$=A2^2 - 22*A2 + 112$$

Negatiivisia jäseniä ovat a_9 , a_{10} , a_{11} , a_{12} ja a_{13} .

Vastaus

Negatiivisia jäseniä ovat a_9 , a_{10} , a_{11} , a_{12} ja a_{13} .

3.19

- a) Lukujonon 3, 6, ... toinen jäsen saadaan ensimmäisestä jäsenestä lisäämällä luku 3: $3 + 3 = 6$.

Toinen jäsen saadaan, kun luku kolme lisätään ensimmäiseen jäseneen 1 kerran.

Kolmas jäsen saadaan, kun luku kolme lisätään ensimmäiseen jäseneen 2 kertaa.

Neljäs jäsen saadaan, kun luku kolme lisätään ensimmäiseen jäseneen 3 kertaa.

Siis lukujonon kahdeskymmenes jäsen saadaan, kun luku kolme lisätään ensimmäiseen jäseneen 19 kertaa.

$$a_{20} = 3 + 19 \cdot 3 = 60$$

- b) Lukujonon 3, 6, ... toinen jäsen saadaan ensimmäisestä jäsenestä kertomalla luvulla 2: $3 \cdot 2 = 6$.

Toinen jäsen saadaan, kun ensimmäinen jäsen kerrotaan luvulla kaksi 1 kerran.

Kolmas jäsen saadaan, kun ensimmäinen jäsen kerrotaan luvulla kaksi 2 kertaa.

Neljäs jäsen saadaan, kun ensimmäinen jäsen kerrotaan luvulla kaksi 3 kertaa.

Siis lukujonon kahdeskymmenes jäsen saadaan, kun ensimmäinen jäsen kerrotaan luvulla kaksi 19 kertaa.

$$a_{20} = 3 \cdot 2^{19} = 1\,572\,864$$

Vastaus

- a) lisättävä luku 3; $a_{20} = 60$

- b) kertoja 2; $a_{20} = 1\,572\,864$

3.20

- a) Lukujonon yleisen jäsenen lauseke on $a_n = (-1)^n$. Lasketaan lukujonon viisi ensimmäistä jäsentä.

$$a_1 = (-1)^1 = -1$$

$$a_2 = (-1)^2 = 1$$

$$a_3 = (-1)^3 = -1$$

$$a_4 = (-1)^4 = 1$$

$$a_5 = (-1)^5 = -1$$

Lukujonon viisi ensimmäistä jäsentä ovat $-1, 1, -1, 1$ ja -1 .

- b) Jono $-6, 6, -6, 6, \dots$ voidaan kirjoittaa muodossa

$$\begin{array}{ccccccc} -1 \cdot 6, & 1 \cdot 6, & -1 \cdot 6, & 1 \cdot 6, & \dots \\ a_1 = -6 & a_2 = 6 & a_3 = -6 & a_4 = 6 \end{array}$$

a-kohdan perusteella jonon yleisen jäsenen lauseke on $a_n = (-1)^n \cdot 6$.

- c) Jono $0, 6, 0, 6, \dots$ voidaan kirjoittaa muodossa

$$\begin{array}{ccccccc} 3 + (-3), & 3 + 3, & 3 + (-3), & 3 + 3, & \dots \\ \underbrace{a_1 = 0} & a_2 = 6 & \underbrace{a_3 = 0} & a_4 = 6 \end{array}$$

a- ja b-kohtien perusteella jonon yleisen jäsenen lauseke on

$$a_n = 3 + (-1)^n \cdot 3.$$

Vastaus

- a) Viisi ensimmäistä jäsentä ovat $-1, 1, -1, 1$ ja -1 .
b) $a_n = (-1)^n \cdot 6$ c) $a_n = 3 + (-1)^n \cdot 3$

3.21

Lasketaan lukujonon seitsemäs jäsen.

$$\begin{aligned}a_7 &= a_{2 \cdot 3 + 1} & a_{2n+1} &= 1 - a_n \\&= 1 - a_3 \\&= 1 - a_{2 \cdot 1 + 1} & a_{2n+1} &= 1 - a_n \\&= 1 - (1 - a_1) & a_1 &= 1 \\&= 1 - (1 - 1) \\&= 1\end{aligned}$$

Lasketaan lukujonon 2021. jäsen.

$$\begin{aligned}a_{2021} &= a_{2 \cdot 1010 + 1} & a_{2n+1} &= 1 - a_n \\&= 1 - a_{1010} = 1 - a_{2 \cdot 505} & a_{2n} &= a_n \\&= 1 - a_{505} = 1 - a_{2 \cdot 252 + 1} \\&= 1 - (1 - a_{252}) \\&= a_{252} = a_{2 \cdot 126} \\&= a_{126} = a_{2 \cdot 63} \\&= a_{63} = a_{2 \cdot 31 + 1} \\&= 1 - a_{31} = 1 - a_{2 \cdot 15 + 1} \\&= 1 - (1 - a_{15}) \\&= a_{15} = a_{2 \cdot 7 + 1} \\&= 1 - a_7 & \text{Sijoitetaan } a_7 &= 1. \\&= 1 - 1 = 0\end{aligned}$$

Vastaus

$$a_7 = 1 \text{ ja } a_{2021} = 0$$

3.22

a) Lasketaan lukujonon (u_n) ensimmäisiä jäseniä.

$$u_1 = 4 \cdot 1^2 - 3 \cdot 1 + 5 = 6$$

$$u_2 = 4 \cdot 2^2 - 3 \cdot 2 + 5 = 15$$

$$u_3 = 4 \cdot 3^2 - 3 \cdot 3 + 5 = 32$$

$$u_4 = 4 \cdot 4^2 - 3 \cdot 4 + 5 = 57$$

$$u_5 = 4 \cdot 5^2 - 3 \cdot 5 + 5 = 90$$

$$u_6 = 4 \cdot 6^2 - 3 \cdot 6 + 5 = 131$$

Lasketaan erotusjonon (e_n^1) ensimmäisiä jäseniä.

$$e_1^1 = 15 - 6 = 9$$

$$e_2^1 = 31 - 15 = 17$$

$$e_3^1 = 57 - 32 = 25$$

$$e_4^1 = 90 - 57 = 33$$

$$e_5^1 = 131 - 90 = 41$$

Lasketaan toisen kertaluvun erotusjonon (e_n^2) ensimmäisiä jäseniä.

$$e_1^2 = 17 - 9 = 8$$

$$e_2^2 = 25 - 17 = 8$$

$$e_3^2 = 33 - 25 = 8$$

$$e_4^2 = 41 - 33 = 8$$

Toisen kertaluvun erotusjono vaikuttaisi olevan vakiojono
8, 8, 8, 8,

b) Olkoon $u_n = f(n) = an^2 + bn + c$.

Määritetään erotusjonon yleinen jäsen.

$$\begin{aligned}e_n^1 &= u_{n+1} - u_n \\&= f(n+1) - f(n) \\&= a \cdot (n+1)^2 + b \cdot (n+1) + c - (an^2 + bn + c) \\&= a(n^2 + 2n + 1) + \cancel{bn} + b + \cancel{c} - an^2 - \cancel{bn} - \cancel{c} \\&= \cancel{an^2} + 2an + a + b - \cancel{an^2} \\&= 2an + a + b\end{aligned}$$

Määritetään toisen kertaluvun erotusjonon yleinen jäsen.

$$\begin{aligned}e_n^2 &= e_{n+1}^1 - e_n^1 \\&= 2a \cdot (n+1) + a + b - (2an + a + b) \\&= 2an + 2a + a + b - 2an - a - b \\&= 2a\end{aligned}$$

Koska toisen kertaluvun erotusjonon yleisen jäsenen $e_n^2 = 2a$ arvo ei riipu järjestysluvun n arvosta, toisen kertaluvun erotusjono on vakiojono $2a, 2a, 2a, \dots$.

On osoitettu, että toisen kertaluvun erotusjono on vakiojono, jos $u_n = f(n)$ ja f on toisen asteen polynomifunktio. \square

- c) Mikäli f on toisen asteen polynomifunktio, toisen kertaluvun erotusjono on vakiojono.

$$u_1 = f(1) = 3$$

$$u_2 = f(2) = 5$$

$$u_3 = f(3) = 9$$

$$u_4 = f(4) = 16$$

Määritetään erotusjonon ensimmäiset jäsenet.

$$e_1^1 = 5 - 3 = 2$$

$$e_2^1 = 9 - 5 = 4$$

$$e_3^1 = 16 - 9 = 7$$

Määritetään toisen kertaluvun erotusjonon ensimmäiset jäsenet.

$$e_1^2 = 4 - 2 = 2$$

$$e_2^2 = 7 - 4 = 3$$

Koska toisen kertaluvun erotusjonon ensimmäiset jäsenet 2 ja 3 eivät ole yhtä suuret, funktio f ei voi olla toisen asteen polynomifunktio.

Vastaus

- a) Jono vaikuttaa olevan vakiojono 8, 8, 8, 8,
c) Ei ole.

3.23

- a) Lasketaan taulukkolaskentaohjelmalla lukujonon jäseniä, kun ensimmäinen luku on 1.

	A
1	1
2	4
3	2
4	1
5	4
6	2
7	1
8	4
9	2
10	1
⋮	⋮

Soluun A1 kirjoitetaan 1. jäsen.

Soluun A2 kirjoitetaan laskukaava
"= JOS(ONPARILLINEN(A1); A1/2; 3·A1 + 1)".

Kopioidaan solussa A2 olevaa kaavaa alaspäin.

Havaitaan, että kun ensimmäinen jäsen on 1, alkaa lukujonossa toistua numerosarja 4 2 1.

Perustelut käytetylle funktiolle:

JOS(ONPARILLINEN(A1); A1/2; 3·A1 + 1)

- funktio ONPARILLINEN(A1) testaa, onko luku solussa A1 parillinen
- jos luku on parillinen, suoritetaan laskutoimitus $A1/2$
- jos luku ei ole parillinen (eli on pariton), suoritetaan laskutoimitus $3 \cdot A1 + 1$
- kopioitaessa kaavaa, testaus ja laskut kohdistuvat aina lukujonon edelliselle luvulle.

Lasketaan taulukkolaskentaohjelmalla lukujonon jäseniä, kun ensimmäinen luku on 2, 3, 4 ja 5.

	B	C	D	E
1	2	3	4	5
2	1	10	2	16
3	4	5	1	8
4	2	16	4	4
5	1	8	2	2
6	4	4	1	1
7	2	2	4	4
8	1	1	2	2
9	4	4	1	1
10	2	2	4	4
11	1	1	2	2
12	4	4	1	1
13	2	2	4	4
14	1	1	2	2
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

Havaitaan, että kaikissa näissä tapauksissa alkaa toistua numerosarja 4 2 1.

- b) Lasketaan lukujonon jäseniä, kun ensimmäinen jäsen on jokin muu positiivinen kokonaisluku.

	F	G	H	I
1	6	11	15	25
2	3	34	46	76
3	10	17	23	38
4	5	52	70	19
5	16	26	35	58
6	8	13	106	29
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
16	4	4	4	40
17	2	2	2	20
18	1	1	1	10
19	4	4	4	5
20	2	2	2	16
21	1	1	1	8
22	4	4	4	4
23	2	2	2	2
24	1	1	1	1

Havainto numerosarjan 4 2 1 toistuvuudesta näyttäisi pätevän muillakin positiivisilla kokonaisluvuilla.

Vastaus

- a) Lukujonossa alkaa toistua numerosarja 4 2 1.
b) Havainto näyttäisi pätevän muillakin positiivisilla kokonaisluvuilla.